Análisis Matemático I. Primer curso de Grado en Ingeniería de Tecnologías y Servicios de Telecomunicación.

HOJA 3

Tema 2: Sucesiones.

1.- Se dan los primeros términos de una sucesión $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. Suponiendo que la sucesión prosigue como se indica, hallar una fórmula explícita para a_n.

a) $1, -\frac{1}{3}, \frac{1}{5}, -\frac{1}{7}, \frac{1}{9} \dots$ b) $-\frac{1}{4}, \frac{2}{9}, -\frac{3}{16}, \frac{4}{25}, -\frac{5}{36} \dots$

2.- Estudiar el límite de las siguientes sucesiones

(1)	$\left\{\frac{n^2}{n+2}\right\}$	(2)	$\left\{\frac{n^3}{n^3+2n+1}\right\}$	(3)	$\left\{\frac{n}{n^2-n-4}\right\}$
(4)	$\left\{\frac{\sqrt{2n^2-1}}{n+2}\right\}$	(5)	$\left\{\frac{\sqrt{n^3+2n}+n}{n^2+2}\right\}$	(6)	$\left\{\frac{\sqrt{n+1}+n^2}{\sqrt{n+2}}\right\}$
(7)	$\left\{\frac{(-1)^n n^2}{n^2+2}\right\}$	(8)	$\left\{\frac{n+(-1)^n}{n}\right\}$	(9)	$\left\{\left(\frac{2}{3}\right)^n\right\}$
(10)	$\left\{\left(\frac{5}{3}\right)^n\right\}$	(11)	$\left\{\frac{2^n}{4^n+1}\right\}$	(12)	$\left\{\frac{3^n+(-2)^n}{3^{n+1}+(-2)^{n+1}}\right\}$
(13)	$\left\{\frac{n}{n+1}-\frac{n+1}{n}\right\}$	(14)	$\left\{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right\}$	(15)	$\left\{\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\dots+\frac{n}{n^2}\right\}$

3.- Resolver los siguientes apartados:

(a) Utilizar la igualdad $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$ para simplificar la expresión $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$.

(b) Como aplicación, calcular el límite de la sucesión

$$S_n = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \dots + \frac{1}{n\cdot(n+1)}.$$

4.- Demostrar que la sucesión $\{5^n/n!\}$ decrece a partir de $n=5$.

5.- Sea $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, la sucesión definida recursivamente por $a_1 = 1$ y $a_{n+1} = 2a_n + 1$, para todo $n \geq 1$. Demostrar por inducción que $a_n = 2^n - 1$.

6.- Sea $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, la sucesión definida recursivamente por $a_1 = 1$, $a_n = 1 + \sqrt{a_{n-1}}$, para todo $n \geq 2$.

(a) Mediante inducción, probar que

(a.1.) es una sucesión creciente,

(a.2.) está acotada superiormente.

(b) Calcular el límite de la sucesión.

Sugerencia: Tomar límites en la fórmula que define la sucesión.

7.- Sea $a > 1$. Se define por recurrencia la sucesión $\{a_n\}$ por la relación $a_n = \sqrt{a \cdot a_{n-1}}$, $a_1 = \sqrt{a}$. Probar que la sucesión es monótona creciente y acotada. Hallar su límite.

8.- Sea $\{a_n\}$ una sucesión de números reales definida por $a_{n+1} = \sqrt{2\,a_n + 3}$, sabiendo que a_1 es un número mayor que $-\frac{3}{2}$. Demostrar que la sucesión converge y calcular su límite. Indicación: distinguir el caso $a_1 \geq 3$ y $a_1 < 3$.

9.- Sea $a_1 = 1$. Definimos las siguientes sucesiones por recurrencia:

$$(1) \quad a_{n+1} = \frac{1}{4}a_n, \quad (2) \quad a_{n+1} = \frac{1}{n+1}a_n, \quad (3) \quad a_{n+1} = \frac{n}{n+1}a_n, \quad (4) \quad a_{n+1} = 1 + \frac{1}{2}a_n$$

Probar que cada una de ellas es acotada y monótona. Hallar el límite.

10.- Se define recurrentemente la sucesión $a_1 = a > 0$ y $a_n = a_{n-1} + \frac{1}{a_{n-1}}$. ¿Es convergente la sucesión?

11.- Resolver los siguientes apartados:

(a) (*) Demostrar que la sucesión

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

es monótona creciente y está acotada superiormente. Por consiguiente, tiene un límite, que denotamos por e.

Indicación: Puede ser útil tener en cuenta la fórmula del binomio de Newton,

$$(n+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} n^k,$$

donde

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}, \quad \text{y} \quad 0! = 1.$$

(b) (**) Demostrar que si $a_n \to \infty$ cuando $n \to \infty$, entonces

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{a_n}\right)^{a_n} = e, \qquad \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{a_n}\right)^{a_n} = \frac{1}{e}.$$

12.- Calcular, si existen, los límites de las sucesiones que tienen como término general

$$a_n = \left(\frac{n^2+1}{n^2}\right)^{2n^2-3}, \qquad b_n = \left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)^{2n^2+3}, \qquad c_n = a_n + \frac{1}{b_n}.$$

Indicación: Utilizar el ejercicio **11 (b)**.

13.- Hallar los siguientes límites:

(a) $\lim_{n\to\infty}(n^3-1)^{\frac{1}{3n}}$ $\qquad$ (b) $\lim_{n\to\infty} n\left((n+1)^{\frac{1}{2}} - n^{\frac{1}{2}}\right)$.

Comentarios: (*) ejercicio difícil, (**) ejercicio muy difícil.